

На правах рукописи



Мураев Павел Сергеевич

Транспорт бозе-частиц в одномерных периодических структурах

Специальность 1.3.8. Физика конденсированного состояния

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель: **Коловский Андрей Радиевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук» (ФИЦ КНЦ СО РАН), главный научный сотрудник лаборатории теории нелинейных процессов Института физики им. Л.В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук – обособленного подразделения ФИЦ КНЦ СО РАН (ИФ СО РАН).

Официальные оппоненты: **Макаров Денис Владимирович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева Дальневосточного отделения Российской академии наук, директор.

Петров Михаил Игоревич, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО», ведущий научный сотрудник физического факультета.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 10 апреля 2026 г. в 14:30 на заседании диссертационного совета 24.1.228.01 при ФИЦ КНЦ СО РАН по адресу: 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50, строение 38.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФ СО РАН и на сайте: http://kirensky.ru/zdoc/2026/diss_muraev_ps.pdf.

Автореферат разослан «18» февраля 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.228.01,
д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.



Втюрин Александр Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование квантового транспорта частиц в низкоразмерных системах занимает центральное место в современной физике конденсированного состояния вещества и квантовой оптике. Решеточные модели, такие как модель Бозе—Хаббарда, являются ключевыми теоретическими моделями для изучения коллективных явлений — сверхтекучести, бозе-эйнштейновской конденсации и фазовых переходов [1]. Прогресс в экспериментах с ультрахолодными атомами в оптических решетках [2] позволил не только реализовать такие модели, но и управлять свойствами системы, такими как туннелирование, межчастичное взаимодействие и диссипация, с высокой точностью, открыв новые возможности для исследования неравновесной квантовой динамики. Однако некоторые фундаментальные вопросы о механизмах переноса в условиях сильных взаимодействий, декогеренции или диссипации остаются открытыми, требуя разработки новых теоретических подходов.

Для решения указанных проблем ключевым является анализ открытых квантовых систем. В отличие от замкнутых систем, они учитывают взаимодействие с окружением, что приводит к диссипации и установлению стационарных состояний [3]. Особый класс таких систем — *границно-возбуждаемые системы* (англ. boundary-driven systems) [4] — предполагает, что резервуары подключены к краям системы, что в свою очередь приводит к появлению тока частиц. Моделирование таких систем часто опирается на основное кинетическое уравнение в форме Линдблада, также известное как уравнение Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада, которое описывает диссипативную динамику через операторы релаксации [5; 6].

Развитие теории квантового транспорта тесно переплетается с активно развивающейся областью, называемой *атомтроникой*, — аналогом электроники, в котором носителями информации и тока выступают ультрахолодные атомы в оптических решетках [7; 8]. В таких системах управление атомными потоками, аналогичное управлению электронами в полупроводниках, требует глубокого понимания квантовых механизмов транспорта. Перспективным направлением является также использование нелинейных эффектов для создания логических элементов, чувствительных к изменению внешних параметров. Таким образом, изучение квантового транспорта в одномерных решетках не только расширяет фундаментальные знания, но и закладывает основу для технологических прорывов инженерии квантовых систем.

Целью данной работы является теоретическое исследование квантового транспорта ультрахолодных бозе-атомов в одномерных дискретных системах — одномерных цепочках Бозе—Хаббарда, находящихся в контакте с резервуарами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать стационарный ток в открытой одномерной цепочке Бозе—Хаббарда под влиянием межчастичного взаимодействия.
2. Исследовать квантовый транспорт в ромбической цепочке под действием синтетического магнитного поля, проанализировать интерференционные эффекты и изучить влияние межчастичного взаимодействия.
3. Разработать немарковскую модель открытой системы Бозе—Хаббарда с контактами, исследовать явление резонансного туннелирования бозонных частиц и проанализировать воздействие на него межчастичного взаимодействия.
4. Исследовать связь между статистическими свойствами спектра неравновесной матрицы плотности и режимами квантового транспорта.

Научная новизна:

1. Впервые в рамках псевдоклассического подхода проведено комплексное исследование перехода от баллистического к диффузионному транспорту в открытой цепочке Бозе—Хаббарда, обусловленного разрушением коллективных мод при включении межчастичного взаимодействия.
2. Впервые для открытой ромбической цепочки под действием синтетического магнитного поля систематически исследовано взаимное влияние интерференционных эффектов и межчастичного взаимодействия на транспорт, и показано, что взаимодействие разрушает интерференционную блокировку тока, переводя систему в диффузионный режим.
3. Впервые обнаружено и систематически исследовано явление резонансного туннелирования для бозонных носителей в немарковской модели с кольцевыми контактами и показано его разрушение под влиянием межчастичного взаимодействия.
4. Впервые выполнено исследование связи между квантовым хаосом и транспортом в открытой бозонной системе. Показано, что подавление стационарного тока при увеличении взаимодействия коррелирует с переходом статистики спектра матрицы плотности от распределения Пуассона к распределению Вингнера-Дайсона.

Практическая значимость. Результаты работы имеют практическую значимость для экспериментальной физики ультрахолодных атомов, мезоскопических систем, квантовой оптики и атомтроники. Полученные теоретические предсказания и построенные модели могут быть использованы для интерпретации и планирования экспериментов в области квантового

транспорта в оптических решетках, фотонных кристаллах и сверхпроводящих цепях. В частности, результаты по управлению током с помощью синтетического магнитного поля и межчастичного взаимодействия, а также результаты по резонансному туннелированию, открывают пути для создания новых элементов квантовых устройств на основе бозонных систем.

Методология и методы исследования. В основе диссертации лежит решение основного кинетического уравнения в форме Линдблада. Это уравнение решалось численно и аналитически: в случае наличия взаимодействия — с использованием псевдоклассического приближения, основанного на усеченной функции Вигнера, а в случае отсутствия взаимодействия — сводилось к уравнению для одночастичной матрицы плотности. В главе 5 основное кинетическое уравнение решалось численно без использования приближений. В качестве численного метода использовался метод Рунге—Кутты четвёртого порядка, реализованный в среде MATLAB.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В открытой цепочке Бозе—Хаббарда межчастичное взаимодействие вызывает кроссовер от баллистического к диффузионному режиму транспорта, который обусловлен разрушением коллективных мод.
2. В ромбической цепочке под действием магнитного поля межчастичное взаимодействие разрушает интерференционную блокировку транспорта при фазе Пайерлса $\Phi = \pi$, что приводит к появлению конечного тока в области параметров, в которой для невзаимодействующих частиц ток отсутствует.
3. В немарковской модели с контактами при низких температурах наблюдается резонансное туннелирование бозонных частиц. Вместе с тем межчастичное взаимодействие вызывает сдвиг и уширение резонансных пиков, вплоть до полного уничтожения резонансной картины.
4. Подавление тока через одномерную цепочку при увеличении межчастичного взаимодействия является следствием перехода от регулярной динамики к квантовому хаосу, что проявляется в изменении статистики спектра неравновесной матрицы плотности от распределения Пуассона к распределению Вигнера—Дайсона; в пределе сильного взаимодействия наблюдается фермионизация бозонов и восстановление регулярной динамики.

Достоверность полученных результатов обусловлена непротиворечивостью и обоснованностью используемых моделей, корректностью примененных приближений и методов, внутренней согласованностью результатов, полученных различными методами и физической интерпретируемостью полученных данных.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных и всероссийских конференциях: «Всероссийская научная

конференция „Физика ультрахолодных атомов – 2020“» (г. Новосибирск, Россия, 2020 г.); «METANANO Summer School on Photonics of 2D materials» (г. Санкт-Петербург, Россия, 2021 г.); «Конкурс-конференция молодых учёных, аспирантов и студентов ФИЦ КНЦ СО РАН по секции „Физика“» (г. Красноярск, Россия, 2021, 2023 гг.); «17-я и 18-я Всероссийская научная конференция с международным участием „Физика ультрахолодных атомов“» (г. Новосибирск, Россия, 2023, 2024 гг.); «Dynamics Days Asia Pacific 13» (г. Киото, Япония, 2024 г.); «Long-term Workshop on Frontiers in Non-equilibrium Physics 2024» (г. Киото, Япония, 2024 г.); «International Workshop Quantum Computing, Complexity, and Control (QCCC25)» (г. Тэджон, Республика Корея, 2025 г.); «Всероссийская научной конференция с международным участием „Невская фотоника - 2025“» (г. Санкт-Петербург, 2025г.)

Личный вклад. Постановка задач и интерпретация полученных результатов выполнена совместно с научным руководителем д.ф.-м.н. А. Р. Коловским. Все представленные в диссертации оригинальные результаты получены лично автором либо при его непосредственном участии. Реализация алгоритмов расчета и интерпретация части результатов была осуществлена совместно с к.ф.-м.н. Д. Н. Максимовым и А. А. Бычек.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 97 страниц, включая 25 рисунков. Список литературы содержит 145 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований квантового транспорта в низкоразмерных системах, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена обзору публикаций по теме диссертационной работы. Дано краткое введение в теорию открытых квантовых систем с использованием уравнения Линдблада, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{R}}_S}{\partial t} = -i[\hat{\mathcal{H}}_S, \hat{\mathcal{R}}_S] + \sum_j \mathcal{D}[\hat{L}_j](\hat{\mathcal{R}}_S), \quad (1)$$

где $\hat{\mathcal{R}}_S$ — матрица плотности системы, $\hat{\mathcal{H}}_S$ — гамильтониан системы, а член $\mathcal{D}[\hat{L}_j](\hat{\mathcal{R}}_S)$ называется супероператором Линдблада, который определяется

как:

$$\mathcal{D}[\widehat{L}_j](\widehat{\mathcal{R}}_S) = \gamma_j \left(\widehat{L}_j \widehat{\mathcal{R}}_S \widehat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2} \widehat{L}_j^\dagger \widehat{L}_j \widehat{\mathcal{R}}_S - \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_S \widehat{L}_j^\dagger \widehat{L}_j \right), \quad (2)$$

где γ_j — константа релаксации, индекс j может означать как моду так и узел системы, $\{\widehat{L}_j\}$ — набор операторов, которые в зарубежной литературе также называются *jump operators*, описывающих диссипативную часть динамики. Форма операторов \widehat{L}_j описывает, как окружающая среда B действует на систему S . Эта форма должна быть либо определена из микроскопических моделей динамики система-окружающая среда, либо смоделирована феноменологически.

Проанализированы экспериментальные платформы на основе ультрахолодных атомов, в частности работы групп Т. Эслингера и Х. Отта по гранично-возбуждаемым системам. Отдельное внимание уделено методам решения уравнения Линдблада: квантовые траектории, метод одночастичной матрицы плотности и приближение усеченной функции Вигнера. Показаны условия применимости псевдоклассического приближения для систем с большими числами заполнения. Кратко рассмотрена модель Бозе-Хаббарда как основная теоретическая конструкция для описания бозонов в оптических решетках. Гамильтониан Бозе-Хаббарда для одномерной цепочки имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{J}{2} \sum_{\ell=1}^L \left(\widehat{a}_{\ell+1}^\dagger \widehat{a}_\ell + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_{\ell} \widehat{n}_\ell (\widehat{n}_\ell - 1), \quad (3)$$

где J — константа туннелирования, U — микроскопическая константа взаимодействия, а операторы \widehat{a}_ℓ^\dagger и \widehat{a}_ℓ — бозонные операторы рождения и уничтожения частицы на узле с индексом ℓ .

Все дальнейшие главы посвящены анализу решения основного кинетического уравнения (1) с гамильтонианом Бозе-Хаббарда и супероператорами Линдблада различного вида.

Вторая глава посвящена исследованию стационарного тока бозонных частиц через одномерную открытую цепочку Бозе-Хаббарда, соединённую с двумя резервуарами частиц [A1]. Основное внимание уделено роли межчастичного взаимодействия в формировании стационарного состояния.

Для описания динамики частиц в системе используется основное кинетическое уравнение (1) для редуцированной матрицы плотности $\widehat{\mathcal{R}}$ носителей в цепочке:

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{R}}}{\partial t} = -i[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}}] + \widehat{\mathcal{L}}_1(\widehat{\mathcal{R}}) + \widehat{\mathcal{L}}_L(\widehat{\mathcal{R}}), \quad (4)$$

где $\widehat{\mathcal{L}}_1(\widehat{\mathcal{R}})$ — супероператор Линдблада, который отвечает за обмен частицами между левым резервуаром и первым узлом цепочки, $\widehat{\mathcal{L}}_L(\widehat{\mathcal{R}})$ — супероператор

Линдблада, аналогичный $\widehat{\mathcal{L}}_1(\widehat{\mathcal{R}})$, но отвечающий за обмен частицами между правым резервуаром и последним (L -ым) узлом цепочки, $\widehat{\mathcal{H}}$ — гамильтониан Бозе-Хаббарда (3).

Процесс обмена частицами между резервуаром и узлом в данной модели может протекать в обе стороны, т.е. частицы попадают из резервуара в узел и могут также совершать обратное движение. Таким образом супероператор $\widehat{\mathcal{L}}_\ell$ будет иметь следующий вид:

$$\widehat{\mathcal{L}}_\ell(\widehat{\mathcal{R}}) = -\frac{\Gamma_\ell(\bar{n}_\ell + 1)}{2}\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{loss}} - \frac{\Gamma_\ell\bar{n}_\ell}{2}\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{gain}}, \quad (5)$$

где \bar{n}_ℓ — средняя плотность частиц в ℓ -ом резервуаре, $\ell = 1$ соответствует левому резервуару, а $\ell = L$ соответствует правому резервуару, Γ_ℓ — коэффициент, пропорциональный интенсивности обмена частиц с резервуаром, $\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{loss}}$ — супероператор, отвечающий за сток частиц:

$$\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{loss}}(\widehat{\mathcal{R}}) = \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell \widehat{\mathcal{R}} + \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell - 2\hat{a}_\ell \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell^\dagger, \quad (6)$$

$\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{gain}}$ — супероператор, отвечающий за накачку частицами:

$$\widehat{\mathcal{L}}_\ell^{\text{gain}}(\widehat{\mathcal{R}}) = \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \widehat{\mathcal{R}} + \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - 2\hat{a}_\ell^\dagger \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell. \quad (7)$$

Коэффициент Γ_ℓ из (5) играет роль константы релаксации/ диссипации в основном кинетическом уравнении (4). Для определенности будем считать, что средняя плотность частиц в левом резервуаре превышает таковую в правом: $\bar{n}_1 > \bar{n}_L$. Таким образом, левый резервуар действует как источник частиц, а правый — как сток.

Для более глубокого понимания релаксационных процессов, обусловленных супероператорами Линдблада $\widehat{\mathcal{L}}_\ell$, уравнение (4) переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{R}}}{\partial t} = -i[\widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}}] + \widehat{\mathcal{D}}(\widehat{\mathcal{R}}) + \widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\mathcal{R}}), \quad (8)$$

где введены релаксационные супероператоры $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\mathcal{G}}$, определяемые выражениями:

$$\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{\mathcal{R}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=1,L} D_\ell \left(\left[\hat{a}_\ell, \left[\hat{a}_\ell^\dagger, \widehat{\mathcal{R}} \right] \right] + \left[\hat{a}_\ell^\dagger, \left[\hat{a}_\ell, \widehat{\mathcal{R}} \right] \right] \right), \quad (9)$$

$$\widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\mathcal{R}}) = -\frac{1}{2} \sum_{\ell=1,L} \Gamma_\ell \left(\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell \widehat{\mathcal{R}} + \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell - 2\hat{a}_\ell \widehat{\mathcal{R}} \hat{a}_\ell^\dagger \right). \quad (10)$$

Физическая интерпретация этих супероператоров следующая: супероператор $\widehat{\mathcal{D}}$ описывает диффузионные процессы с коэффициентами диффузии $D_\ell = \Gamma_\ell \bar{n}_\ell$, тогда как супероператор $\widehat{\mathcal{G}}$ соответствует диссипативным процессам с коэффициентами трения Γ_ℓ .

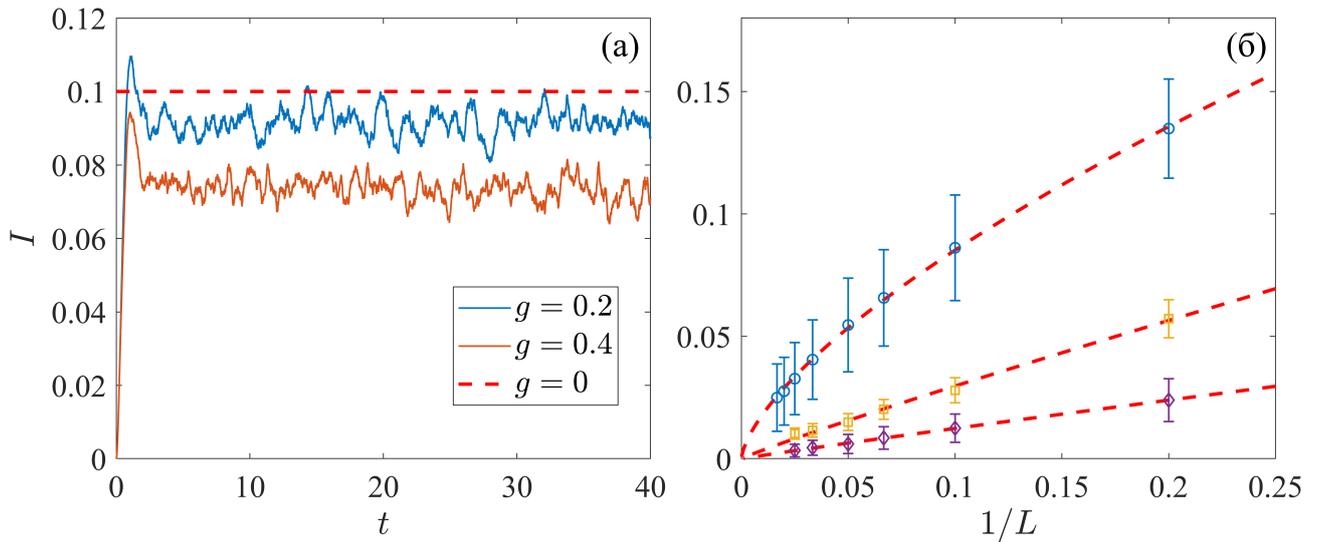


Рисунок 1 — (а) Динамика тока для разных значений константы взаимодействия $g = U\bar{n}_1$. Штриховая линия — аналитическое решение (11), сплошные линии — численный результат псевдоклассического приближения. Значения параметров: $L = 5$, $J = 1$, $\bar{n}_1 = 10$, $\bar{n}_L = 5$, $\Gamma = 0.5$ ($D_1 = \Gamma$, $D_L = \Gamma \bar{n}_L/\bar{n}_1$). (б) Зависимость стационарного тока от обратной длины цепочки при различных плотностях частиц в правом резервуаре \bar{n}_L . Маркеры — численные результаты: $\bar{n}_L = 0$ синие кружки, $\bar{n}_L = 1$ желтые квадраты, $\bar{n}_L = 1.5$ фиолетовые ромбы. Остальные параметры: $\bar{n}_1 = 2$, $g = 1$ ($U = 0.5$), $J = 1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma = 0.5$, усреднение производится по 8192 различным реализациям случайного процесса. Планки погрешностей соответствуют статистической ошибке из-за конечного числа реализаций случайного процесса. Штриховые линии — степенная аппроксимация $I = \beta L^{-\alpha}$: $\alpha = 0.67, 0.93, 0.95$ (для $\bar{n}_L = 0, 1, 1.5$).

Для анализа динамики и стационарного состояния использовался псевдоклассический подход, который позволил свести квантовую задачу, описываемую уравнением Линдблада (8), к классической задаче о динамике системы из L связанных нелинейных осцилляторов, где граничные осцилляторы подвержены воздействию трения и стохастического возбуждения. В данном подходе микроскопическая константа взаимодействия U заменяется макроскопической константой взаимодействия $g = U\bar{n}_1$. Сравнение с прямым численным решением основного кинетического уравнения для короткой цепочки ($L = 3$) подтвердило адекватность данного приближения уже при $\bar{n}_1 \gtrsim 2$.

В случае невзаимодействующих частиц ($U = 0$) получено аналитическое выражение для стационарного тока:

$$I = \frac{\Gamma J^2}{J^2 + \Gamma^2} \cdot \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_L}{2}, \quad (11)$$

аналогичное выражению для стационарного тока из работы [9], где Γ — коэффициент, пропорциональный интенсивности обмена частиц с резервуаром. Ток пропорционален разности средних плотностей в резервуарах $\Delta\bar{n} = \bar{n}_1 - \bar{n}_L$ и не зависит от длины цепочки L , что является характерным признаком баллистического транспорта. Анализ спектральных плотностей осцилляторов выявил резонансные пики, соответствующие коллективным модам цепочки, которые и обеспечивают когерентный баллистический перенос.

Наличие межчастичного взаимодействия ($U > 0$) качественно изменяет транспортные свойства системы, приводя к подавлению стационарного тока (рисунок 1а). Ключевым следствием является появление сильной зависимости величины стационарного тока от длины цепочки $I \sim L^{-\alpha}$ (рисунок 1б). В случае малой разности $\Delta\bar{n} \ll \bar{n}_1$ показатель степени α становится равным единице, то есть устанавливается диффузионный режим транспорта $I \sim 1/L$. Этот переход, как показал спектральный анализ, обусловлен разрушением коллективных мод нелинейностью, что проявляется в исчезновении резонансных пиков. Важно подчеркнуть, что переход от баллистического к диффузионному транспорту с ростом константы взаимодействия является кроссовером, а не фазовым переходом.

Таким образом, в главе 2 установлено, что межчастичное взаимодействие играет определяющую роль в динамике открытых квантовых систем, управляя переходом между принципиально разными режимами транспорта. Результаты главы опубликованы в работе [A1].

Третья глава посвящена исследованию квантового транспорта в ромбической цепочке Бозе-Хаббарда (рисунок 2), находящейся под действием синтетического магнитного поля и соединяющей два резервуара частиц [A2]. Основной задачей является изучение влияния межчастичного взаимодействия на бозонный транспорт.

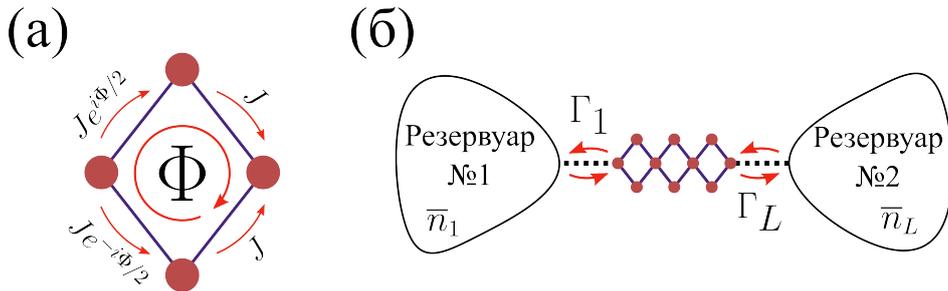


Рисунок 2 — (а) Элементарный блок и (б) общая схема ромбической цепочки, соединяющей два резервуара. Фаза Пайерлса Φ , связанная с синтетическим магнитным потоком, модифицирует константы туннелирования.

Как и во второй главе, для описания динамики используется основное кинетическое уравнение (4), но с модифицированным гамильтонианом.

Его главное отличие от гамильтониана (3) заключается в структуре члена, описывающего туннелирование частиц. Гамильтониан Бозе-Хаббарда для ромбической цепочки записывается в виде:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \sum_{\langle l,m \rangle} (J_{lm} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_m + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} \sum_{\ell} \hat{n}_{\ell} (\hat{n}_{\ell} - 1), \quad (12)$$

где $J_{l,m}$ — матричный элемент туннелирования между узлами l и m , по модулю равный J , и содержащий фазу Пайерлса Φ , рисунок 2(а).

В данной главе показано, что стационарный ток демонстрирует четкую интерференционную картину в зависимости от магнитного потока (фазы Пайерлса Φ). При $\Phi = 0$ интерференция конструктивна, и ток максимален. В этом случае также получено аналитическое выражение для стационарного тока, которое имеет довольно простой вид при $\Gamma_1 = \Gamma_L = \Gamma$:

$$I(0) = \frac{J^2 \Gamma}{J^2 + \Gamma^2/2} \cdot \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_L}{2}. \quad (13)$$

При $\Phi = \pi$ возникает деструктивная интерференция, приводящая к полной блокировке транспорта и нулевому току. Для промежуточных значений потока зависимость тока с хорошей точностью аппроксимируется выражением $I(\Phi) \approx I(0) \cos^2(\Phi/2)$, как показано на рисунке 3(а).

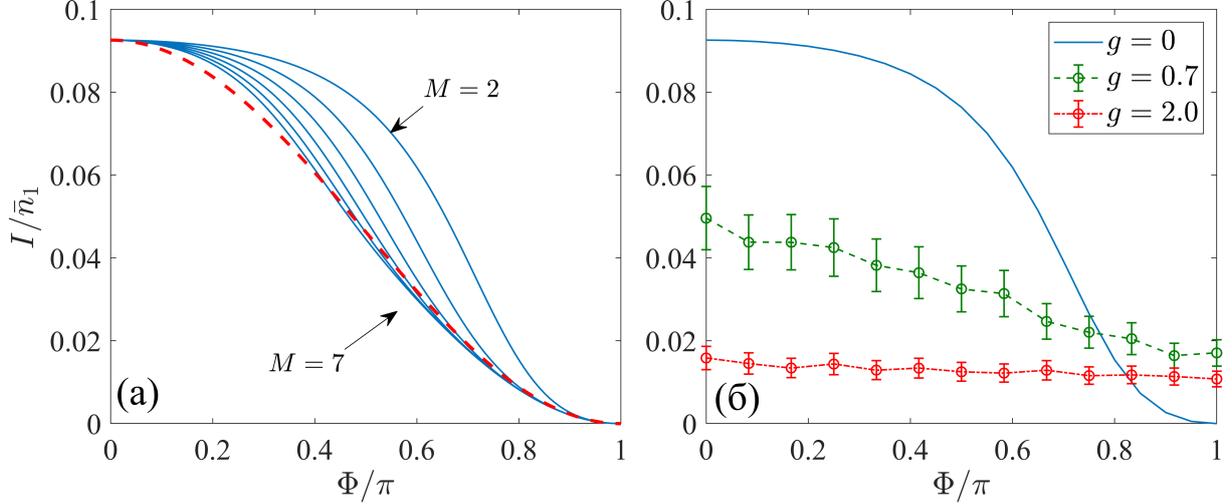


Рисунок 3 — (а) Зависимость нормированного стационарного тока I/\bar{n}_1 от фазы Пайерлса Φ для невзаимодействующих частиц и разного числа ромбов M . Параметры: $\Gamma_1 = \Gamma_L = 0.4$, $\bar{n}_L/\bar{n}_1 = 0.5$. Пунктирная линия — аппроксимация $\cos^2(\Phi/2)$. (б) Нормированный стационарный ток как функция фазы Пайерлса Φ для разных значений макроскопической константы взаимодействия g . Параметры: $M = 5$, $\Gamma_1 = \Gamma_L = 0.4J$, $\bar{n}_L/\bar{n}_1 = 0.5$. Планка погрешностей указывает на статистическую ошибку метода Монте-Карло [A2].

Наличие межчастичного взаимодействия ($U > 0$) кардинально меняет картину транспорта. Взаимодействие подавляет ток в области слабого поля

($\Phi \approx 0$), что соответствует переходу от баллистического к диффузионному режиму для длинных цепочек, согласующемуся с результатами главы 2. Напротив, в области $\Phi \approx \pi$, где для невзаимодействующего случая ток отсутствует, взаимодействие разрушает интерференционную локализацию и вызывает появление конечного тока, рисунок 3(б).

Показано, что разрушение локализации при $\Phi = \pi$ имеет динамическую природу и связано с неустойчивостью локализованных состояний краевых димеров из-за взаимодействия. Это приводит к длительному переходному процессу, в ходе которого происходит последовательное заселение узлов цепочки, после чего система выходит на стационарный режим с диффузионным транспортом.

Таким образом, в главе 3 продемонстрировано, что межчастичное взаимодействие играет определяющую роль в квантовом транспорте через системы со сложной зонной структурой, подавляя интерференционные эффекты и приводя к установлению универсального диффузионного режима, практически не зависящего от значения магнитного потока. Результаты главы опубликованы в работах [A2–A5].

Четвертая глава посвящена разработке и исследованию немарковской модели открытой цепочки Бозе-Хаббарда, которая преодолевает ограничения стандартного марковского приближения [A6]. Предложенная модель использует кольцевые контакты конечного размера в качестве резервуаров (рисунок 4), что позволяет более адекватно описывать экспериментальные условия низкотемпературных систем с сконденсированными бозе-частицами.

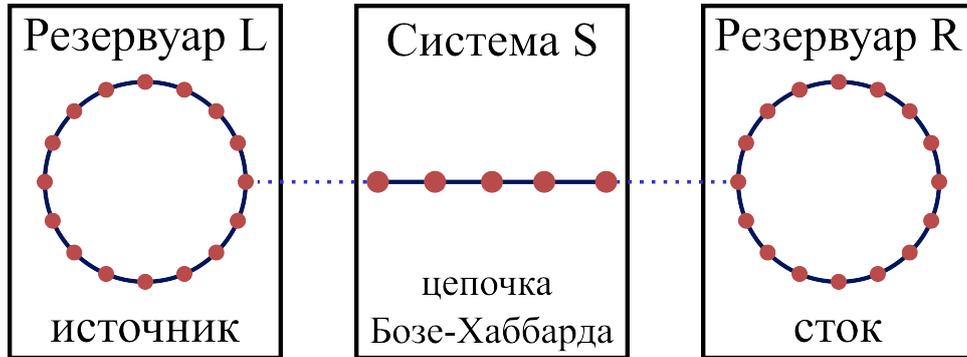


Рисунок 4 — Схематическое изображение цепочки Бозе-Хаббарда с кольцевыми контактами.

Динамика системы описывается основным кинетическим уравнением для полной матрицы плотности $\hat{\mathcal{R}}(t)$:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{R}}}{\partial t} = -i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{R}}] + \sum_{j=L,R} \left[\hat{\mathcal{L}}_d^{(j)}(\hat{\mathcal{R}}) + \hat{\mathcal{L}}_g^{(j)}(\hat{\mathcal{R}}) \right], \quad (14)$$

где полный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ имеет вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_s + \sum_{j=L,R} \hat{\mathcal{H}}_r^{(j)} + \sum_{j=L,R} \hat{\mathcal{H}}_\varepsilon^{(j)}. \quad (15)$$

Гамильтониан цепочки $\hat{\mathcal{H}}_s$ задаётся выражением:

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \delta \sum_{\ell=1}^L \hat{n}_\ell - \frac{J_s}{2} \sum_{\ell=1}^{L-1} (\hat{a}_{\ell+1}^\dagger \hat{a}_\ell + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} \sum_{\ell=1}^L \hat{n}_\ell (\hat{n}_\ell - 1), \quad (16)$$

где δ — энергия на узле, которая в данной системе выступает как аналог напряжения затвора, а \hat{a}_ℓ^\dagger и \hat{a}_ℓ — бозонные операторы рождения и уничтожения, действующие на узле цепочки с индексом ℓ . Гамильтонианы колец $\hat{\mathcal{H}}_r^{(j)}$ записываются в терминах бозонных операторов \hat{b}_k^\dagger и \hat{b}_k , действующих в фоковском пространстве блоховских состояний:

$$\hat{\mathcal{H}}_r^{(j)} = \sum_{k=1}^M E_k \hat{b}_k^{(j)\dagger} \hat{b}_k^{(j)}, \quad E_k = -J_r \cos\left(\frac{2\pi k}{M}\right). \quad (17)$$

Гамильтонианы связи $\hat{\mathcal{H}}_\varepsilon^{(j)}$:

$$\hat{\mathcal{H}}_\varepsilon^{(j)} = -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{M}} \hat{a}_{\ell_j}^\dagger \sum_{k=1}^M \hat{b}_k^{(j)} + \text{H.c.}, \quad (18)$$

где $\ell_j = 1$ для левого кольца ($j = L$) и $\ell_j = L$ для правого ($j = R$).

Термодинамические свойства резервуаров задаются супероператорами Линдблада:

$$\hat{\mathcal{L}}_d^{(j)}(\hat{\mathcal{R}}) = -\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^M (\bar{n}_{j,k} + 1) \left(\hat{b}_k^{(j)\dagger} \hat{b}_k^{(j)} \hat{\mathcal{R}} - 2\hat{b}_k^{(j)} \hat{\mathcal{R}} \hat{b}_k^{(j)\dagger} + \hat{\mathcal{R}} \hat{b}_k^{(j)\dagger} \hat{b}_k^{(j)} \right), \quad (19)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_g^{(j)}(\hat{\mathcal{R}}) = -\frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^M \bar{n}_{j,k} \left(\hat{b}_k^{(j)} \hat{b}_k^{(j)\dagger} \hat{\mathcal{R}} - 2\hat{b}_k^{(j)\dagger} \hat{\mathcal{R}} \hat{b}_k^{(j)} + \hat{\mathcal{R}} \hat{b}_k^{(j)} \hat{b}_k^{(j)\dagger} \right), \quad (20)$$

где

$$\bar{n}_{j,k} = \frac{1}{e^{\beta(E_k + \mu_j)} - 1}. \quad (21)$$

Супероператоры Линдблада (19) и (20) обеспечивают релаксацию числа частиц в кольце к распределению Бозе—Эйнштейна (21) с заданным химическим потенциалом μ и обратной температурой β . Скорость, с которой происходит эта релаксация, определяется константой γ . В качестве управляющего параметра используется средняя плотность частиц в кольце

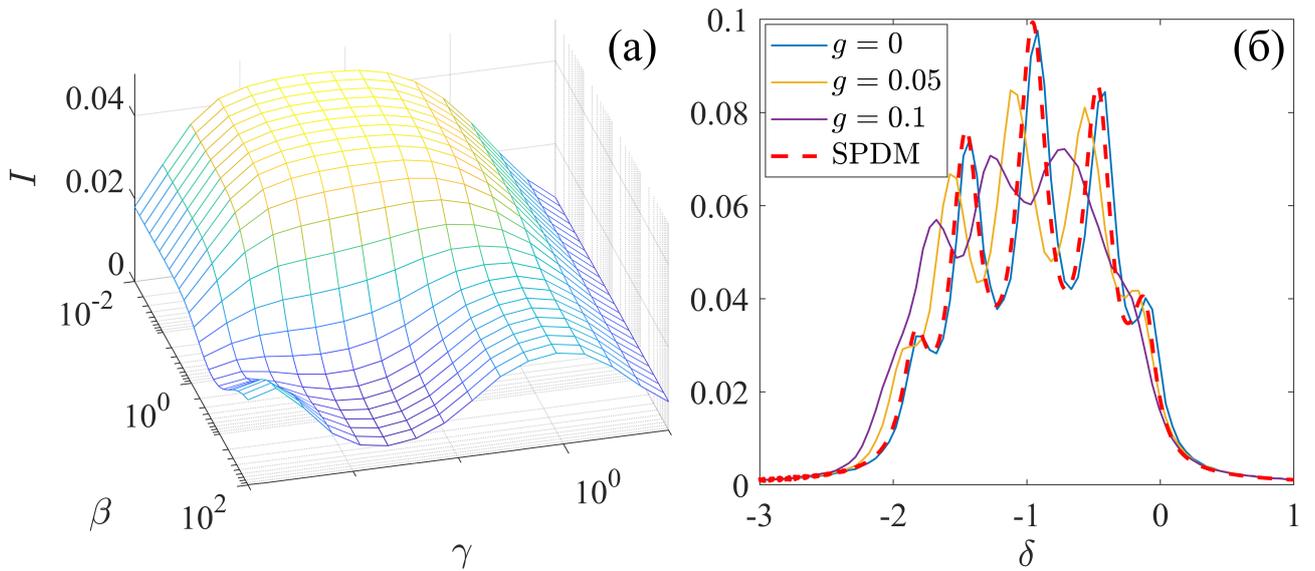


Рисунок 5 — (а) Зависимость стационарного тока от γ и β для $L = 5$, $\epsilon = 0.4$, $\bar{n}_L = 1$, $\bar{n}_R = 0.1$, размер колец $M = 100$. (б) Стационарный ток как функция отстройки δ . Остальные параметры: $\beta = 10$, $\gamma = 0.2$ и $\epsilon = 0.4$. Пунктирная линия соответствует решению для одночастичной матрицы плотности (SPDM). Сплошные линии – решения, полученные в псевдоклассическом приближении для разных значений макроскопической константы взаимодействия g . Усреднение производилось по 6300 различным реализациям случайного процесса.

$\bar{n}_j = \sum_{k=1}^M \bar{n}_{j,k}/M$, которая вместе с температурой однозначно определяет химический потенциал μ . Далее будем обозначать плотности частиц в левом и правом кольцах через \bar{n}_L и \bar{n}_R соответственно.

В рамках модели исследован стационарный ток бозе-частиц через одномерную цепочку. Показано, что зависимость тока от константы релаксации γ имеет немонотонный характер с максимумом при промежуточных значениях γ , рисунок 5(а). В случае $\gamma \rightarrow 0$ стационарный ток в численной реализации стремится к нулю. Это происходит из-за конечных размеров резервуаров: дискретные уровни спектра резервуара не совпадают с дискретными уровнями системы, что приводит к подавлению тока. При этом в теории предполагается, что размер резервуаров, длина колец, стремится к бесконечности. А в случае $\gamma \rightarrow \infty$ задача редуцируется к модели, изученной в главе 2, то есть к цепочке Бозе–Хаббарда, непосредственно соединённой с двумя атомными резервуарами. Тогда, согласно выражению (11) стационарный ток стремится к нулю с ростом γ .

Главным результатом является демонстрация явления резонансного туннелирования для бозонов, аналогичного известному эффекту для фермионов. Показано, что стационарный ток резко возрастает при совпадении напряжения затвора δ с собственными частотами цепочки, рисунок 5(б). Исследовано влияние межчастичного взаимодействия, которое вызывает сдвиг

и уширение резонансных пиков, а при увеличении константы взаимодействия приводит к полному размыванию резонансной картины.

Проведенное сравнение марковского и немарковского подходов показало, что последний обеспечивает адекватное описание системы в более широком диапазоне параметров, особенно при низких температурах. Результаты главы имеют значение для разработки элементов атомтроники и понимания квантового транспорта в мезоскопических бозонных системах. Результаты главы опубликованы в работах [A6; A7].

Пятая глава посвящена исследованию квантового транспорта в одномерной цепочке Бозе-Хаббарда с асимметричной некогерентной связью между граничными узлами [A8]. Разработана модель, в которой разность констант релаксации Γ_1 и Γ_2 для операторов Линдблада, описывающих переброс частиц между первым и последним узлами, играет роль "батарейки" (рисунок 6), создающей стационарный ток через цепочку.

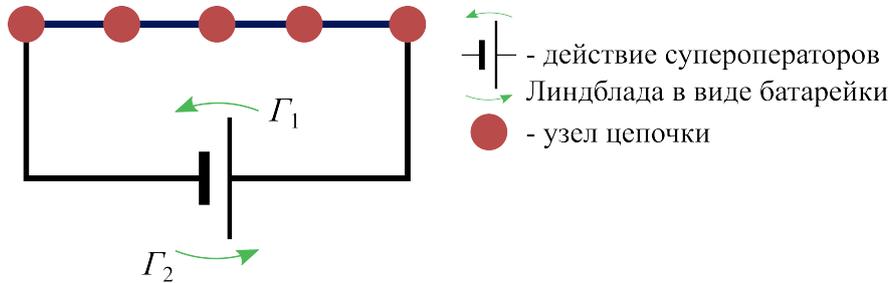


Рисунок 6 — Схематическое изображение цепочки Бозе-Хаббарда с реализацией эффекта "батарейки" через асимметричную некогерентную связь между первым и последним узлами. Стрелки иллюстрируют направления потоков частиц, индуцируемых супероператорами $\hat{\mathcal{L}}_1$ и $\hat{\mathcal{L}}_2$.

Динамика системы, как и в главе 2, описывается уравнением Линдблада (1) с гамильтонианом Бозе-Хаббарда (3). Однако, в отличие от стандартной открытой модели из главы 2, в данной главе исследовалась модель с сохранением числа частиц, что достигается использованием $\hat{L}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_L$ и $\hat{L}_2 = \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_1$ в уравнении Линдблада (1). Супероператоры Линдблада теперь описывают некогерентный перенос частиц между последним и первым узлом цепочки со скоростью Γ_1 , и некогерентный перенос в обратном направлении со скоростью Γ_2 . Ключевой момент заключается в том, что при $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ в системе возникает ненулевой стационарный ток. Направление тока зависит от того, какая из констант больше: если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то процесс переброса частиц с последнего узла на первый преобладает над обратным процессом, что создаёт результирующий ток в направлении от первого сайта к последнему. Именно асимметрия в скоростях этих двух процессов, $\Delta\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, выполняет роль "батарейки" или эффективной разности химических потенциалов, поддерживающей ток в цепи. По аналогии с электронными устройствами, эта

асимметрия создаёт постоянный ток, подобно тому, как батарея создаёт напряжение в электрической цепи. Заметим, что в случае симметричной связи, $\Gamma_1 = \Gamma_2$, стационарная матрица плотности является максимально смешанным состоянием и пропорциональна единичной матрице: $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathbb{1}}/\mathcal{N}$, где \mathcal{N} – размерность гильбертова пространства. В этом состоянии ток отсутствует.

Для создания ненулевого тока и последующего анализа мы фокусируемся на режиме линейного отклика, полагая:

$$\Gamma_1 = \Gamma + \Delta\Gamma/2, \quad \Gamma_2 = \Gamma - \Delta\Gamma/2, \quad \text{где } \Delta\Gamma \ll \Gamma. \quad (22)$$

В этом приближении матрица плотности может быть представлена в виде:

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{\hat{\mathbb{1}}}{\mathcal{N}} + \Delta\Gamma\hat{\mathcal{R}}^{(1)}, \quad (23)$$

где $\hat{\mathcal{R}}^{(1)}$ – неравновесная матрица плотности, для которой выполняется условие $\text{Tr}[\hat{\mathcal{R}}^{(1)}] = 0$.

Основное внимание уделено систематическому исследованию влияния межчастичного взаимодействия на свойства стационарной матрицы плотности. Показано, что зависимость стационарного тока от константы взаимодействия U имеет немонотонный характер, рисунок 7. При $U \sim J$ наблюдается резкое уменьшение тока, сопровождающееся качественным изменением статистических свойств системы – переходом от регулярной динамики к квантовому хаосу. Этот переход проявляется в изменении распределения расстояний между уровнями спектра матрицы плотности. А именно, распределение величины $s = (\lambda_{j+1} - \lambda_j)f(\lambda_j)$, где $f(\lambda)$ – средняя плотность состояний, меняется от распределения Пуассона к распределению Вигнера-Дайсона, как видно на рисунке 7 (нижний ряд). Важно подчеркнуть, что такой же переход к квантовому хаосу при $U \sim J$ наблюдается в закрытой цепочке Бозе-Хаббарда [10]. Полученные результаты, в частности, подавление тока при $U \sim J$, качественно согласуются с выводами глав 2 и 3, полученными для систем с марковскими резервуарами. Это позволяет сделать обобщающее заключение: увеличение межчастичного взаимодействия в гранично-возбуждаемых бозонных системах приводит к переходу от баллистического режима транспорта к диффузионному, и в рамках данной модели показано, что этот переход является следствием перехода от регулярной динамики к хаотической. Также обнаружено нетривиальное поведение системы в пределе сильного взаимодействия ($U \gg J$), где происходит фермионизация бозонных частиц и восстановление регулярной динамики. В этом режиме наблюдается остаточная проводимость, обусловленная наличием локальных бозонов (hardcore bosons), и контринтуитивное уменьшение тока с ростом числа частиц.

Полученные результаты демонстрируют глубокую связь между статистическими свойствами неравновесной матрицы плотности и транспортными

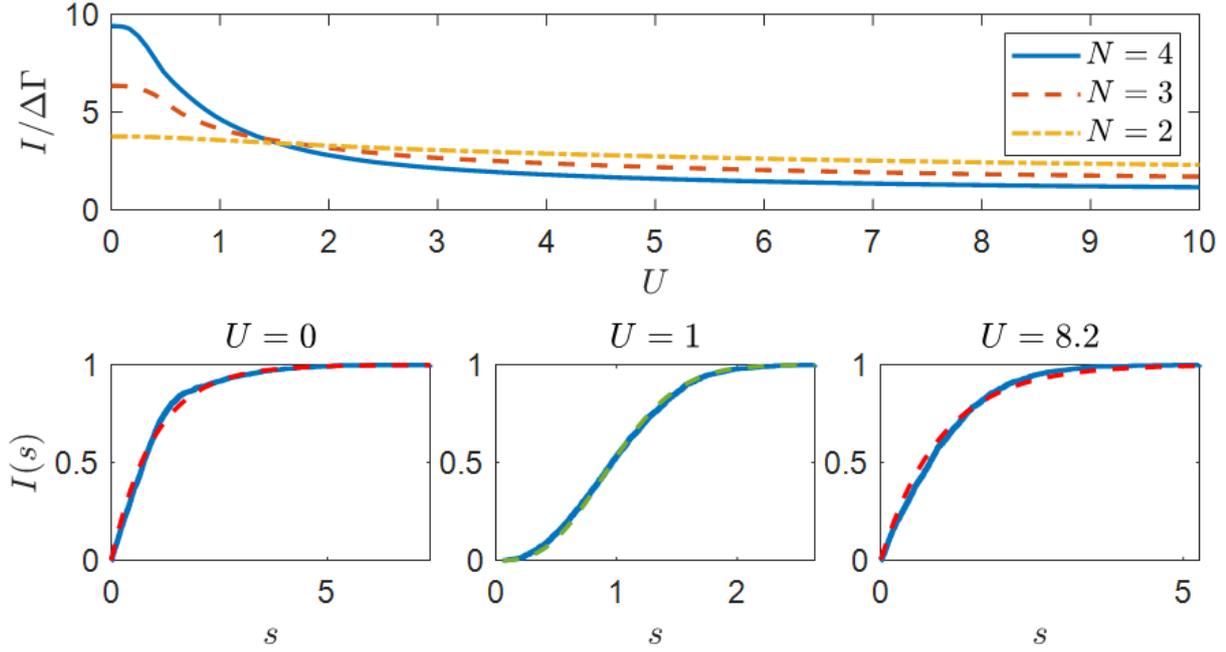


Рисунок 7 — Полный ток как функция константы взаимодействия U для трех различных значений числа частиц $N = 2, 3, 4$ (верхний ряд). Параметры: $L = 6$, $\Gamma = 0.04$ ($\Delta\Gamma = 0.002$). Сравнение кумулятивного распределения уровней спектра неравновесной матрицы плотности с кумулятивными распределениями Пуассона (красная штриховая линия) и ГУА Вигнера-Дайсона (зеленая штриховая линия) для разных значений константы взаимодействия U (нижний ряд). Другие параметры: $L = 10$, $N = 5$ ($\mathcal{N} = 2002$), и $\Gamma = 0.04$. Для статистического анализа взято 60% собственных значений из центральной части спектра.

характеристиками системы. Также показано, что предложенная модель позволяет проводить точный анализ квантового транспорта без привлечения приближённых методов. Результаты главы опубликованы в работах [A8; A9].

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для одномерной цепочки Бозе-Хаббарда, соединяющей два атомных резервуара, в рамках псевдоклассического приближения показано, что умеренное межчастичное взаимодействие ($U \sim J$) приводит к значительному подавлению стационарного тока и смене транспортного режима. Анализ спектральных плотностей осцилляторов выявил разрушение коллективных мод и исчезновение резонансных пиков, что свидетельствует о переходе от баллистического переноса к диффузионному механизму.
2. Исследована ромбическая цепочка под действием внешнего искусственного магнитного поля. Показано, что в отсутствие взаимодействия ток демонстрирует интерференционную зависимость $\sim \cos^2 \Phi/2$ и полностью подавляется при $\Phi = \pi$ из-за деструктивной интерференции. При $\Phi = 0$ получено аналитическое выражение. Показано, что межчастичное взаимодействие разрушает локализацию, индуцированную магнитным потоком, и восстанавливает ток в области $\Phi \approx \pi$.
3. Предложена немарковская модель открытой системы с контактами, которая адекватно описывает низкотемпературные резервуары близкие к бозе-конденсации. Обнаружено явление резонансного туннелирования бозонов, аналогичное фермионному случаю, и показано, что межчастичное взаимодействие вызывает сдвиг и уширение резонансных пиков, вплоть до полного размытия картины при увеличении взаимодействия.
4. На примере открытой модели с сохранением числа частиц продемонстрировано, что увеличение межчастичного взаимодействия приводит к переходу от интегрируемой динамики ($U = 0$) к квантовому хаосу ($U \sim J$), что отражается в изменении статистики спектра матрицы плотности от распределения Пуассона к распределению Вигнера-Дайсона. В пределе сильного взаимодействия ($U \gg J$) наблюдается фермионизация бозонов, приводящая к восстановлению интегрируемости, и сопровождающаяся нетривиальной зависимостью тока от числа частиц.
5. Результаты, полученные для моделей из глав 2 и 5, показывают, что увеличение межчастичного взаимодействия в гранично-возбуждаемых бозонных системах вызывает переход от баллистического режима транспорта к диффузионному. Этот переход является следствием перехода от регулярной динамики к хаотической — как в смысле классического, так и в смысле квантового хаоса.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. Open Bose-Hubbard chain: Pseudoclassical approach [Текст] / A. A. Buzhik [et al.] // Physical Review E. — 2020. — Vol. 101, no. 1. — P. 012208.
- A2. *Muraev, P. S.* Quantum transport in a one-dimensional flux rhombic lattice [Текст] / P. S. Muraev, A. R. Kolovsky // Quantum Electronics. — 2021. — Vol. 51, no. 6. — P. 502—505.
- A3. *Мураев, П. С.* Квантовый транспорт холодных бозе-атомов в ромбической оптической решетке под действием внешнего искусственного магнитного поля [Текст] / П. С. Мураев, А. Р. Коловский // Физика ультрахолодных атомов - 2020. Тезисы докладов 14-ой Всероссийской научной конференции. Новосибирск, 2020. — 2020.
- A4. *Мураев, П. С.* Квантовый транспорт холодных бозе-атомов в ромбической решетке под действием внешнего искусственного магнитного поля [Текст] / П. С. Мураев // Междисциплинарная конференция молодых учёных ФИЦ КНЦ СО РАН (КМУ-XXIV). — 2021.
- A5. *Мураев, П. С.* Переход изолятор-проводник для взаимодействующих бозонов в ромбической решетке [Текст] / П. С. Мураев // Междисциплинарная конференция молодых учёных ФИЦ КНЦ СО РАН (КМУ-XXVI). — 2023.
- A6. *Muraev, P. S.* Resonant transport of bosonic carriers through a quantum device [Текст] / P. S. Muraev, D. N. Maksimov, A. R. Kolovsky // Physical Review A. — 2022. — Vol. 105, no. 1. — P. 013307.
- A7. *Мураев, П. С.* Некоторые особенности проводимости в двухтерминальном фермионном транспорте [Текст] / П. С. Мураев, Д. Н. Максимов, А. Р. Коловский // Физика ультрахолодных атомов - 2024. Программа и тезисы докладов 18-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Новосибирск, 2024. — 2024.
- A8. *Muraev, P. S.* Signatures of quantum chaos and fermionization in the incoherent transport of bosonic carriers in the Bose-Hubbard chain [Текст] / P. S. Muraev, D. N. Maksimov, A. R. Kolovsky // Physical Review E. — 2024. — Vol. 109, no. 3. — P. 1032107.
- A9. *Мураев, П. С.* Признаки квантового хаоса и фермионизации в некогерентном транспорте бозонов в цепочке Бозе-Хаббарда [Текст] / П. С. Мураев, Д. Максимов, А. Р. Коловский // Физика ультрахолодных атомов - 2023. Тезисы докладов 17-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Новосибирск, 2023. — 2023.

Список литературы

1. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms [Текст] / M. Greiner [et al.] // Nature. — 2002. — Vol. 415, no. 6867. — P. 39—44.
2. *Gross, C.* Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices [Текст] / C. Gross, I. Bloch // Science. — 2017. — Vol. 357, no. 6355. — P. 995—1001.
3. *Breuer, H.-P.* The theory of open quantum systems [Текст] / H.-P. Breuer, F. Petruccione. — OUP Oxford, 2002.
4. *Landi, G. T.* Nonequilibrium boundary-driven quantum systems: Models, methods, and properties [Текст] / G. T. Landi, D. Poletti, G. Schaller // Reviews of Modern Physics. — 2022. — Vol. 94, no. 4. — P. 045006.
5. *Lindblad, G.* On the generators of quantum dynamical semigroups [Текст] / G. Lindblad // Communications in mathematical physics. — 1976. — Vol. 48. — P. 119—130.
6. *Gorini, V.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems [Текст] / V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan // Journal of Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821—825.
7. Atomtronics: Ultracold-atom analogs of electronic devices [Текст] / B. Seaman [et al.] // Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. — 2007. — Vol. 75, no. 2. — P. 023615.
8. Roadmap on Atomtronics: State of the art and perspective [Текст] / L. Amico [et al.] // AVS Quantum Science. — 2021. — Vol. 3, no. 3.
9. *Kolovsky, A. R.* Landauer-Büttiker equation for bosonic carriers [Текст] / A. R. Kolovsky, Z. Denis, S. Wimberger // Physical Review A. — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 043623.
10. *Kolovsky, A. R.* Quantum chaos in the Bose-Hubbard model [Текст] / A. R. Kolovsky, A. Buchleitner // Europhysics Letters. — 2004. — Vol. 68, no. 5. — P. 632.

Отпечатано в типографии Института физики им. Л.В. Киренского
Сибирского отделения Российской академии наук – обособленного подразделения ФИЦ
КНЦ СО РАН.

Тираж 80 экз. Заказ № 8. Объем 1,15 усл. печ. л. Формат 60x84/16.
660036, Красноярский край, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50, стр. 38